

מתכונת במתמטיקה 4- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. אופיר וליאור אורזים מתנות לחג בקצב שונה. בחנוכה, כאשר שניהם עבדו במשך אותו זמן, הספיק אופיר להכין 25 מתנות יותר מליאור. בסוכות, הספיק אופיר להכין את אותה כמות המתנות שהספיק ליאור בחנוכה, וליאור הספיק להכין את כמות המתנות שהכין אופיר בחנוכה. בסוכות, זמן העבודה של ליאור היה ארוך פי 4 מזמן העבודה של אופיר.

א. מצא כמה מתנות הכין כל אחד מהם בחנוכה.

ב. נסמן ב- t_1 את הזמן הדרוש לאופיר לארוז מתנה אחת, וב- t_2 הזמן הדרוש לליאור לארוז מתנה אחת.

חשב את היחס $t_1 : t_2$.

2. הסדרה A_n היא הנדסית אינסופית יורדת שאיבריה חיוביים. מהסדרה A_n מרכיבים שתי סדרות חדשות

שהאיברים הכלליים שלהן הם: $B_n = A_{n+1} \cdot A_{n+3}$, $C_n = (A_n)^2$.

א. הוכח ששתי הסדרות החדשות, B_n ו- C_n , גם הן סדרות הנדסיות אינסופיות יורדות.

ב. נתון: סכום הסדרה C_n גדול פי 16 מסכום הסדרה B_n . מצא את מנת הסדרה המקורית A_n .

ג. למרות שהסדרה A_n היא אינסופית, תלמיד עובר על האיברים החל מהראשון והלאה. ברגע שהגיע לאיבר

מסוים שמיקומו אי זוגי, הוא מחליט למחוק את כל האיברים הקטנים מאיבר זה. בסדרת האיברים שלא

נמחקו, האיבר הראשון גדול פי ארבעה מהאיבר האמצעי. מצא כמה איברים בסדרת האיברים שלא נמחקו.

3. ארצ'י הוא כלב מסוכן הנמצא במעקב משטרה של שלושה ימים רצופים. ההסתברות שהוא ישתולל ביום

א' היא p ($p < 0.4$). אם הוא משתולל ביום מסוים, ההסתברות שהוא ישתולל גם למחרת היא $p + 0.1$. אם

הוא אינו משתולל ביום מסוים, ההסתברות שלא ישתולל גם למחרת היא $p + 0.3$. ההסתברות שרק ביום

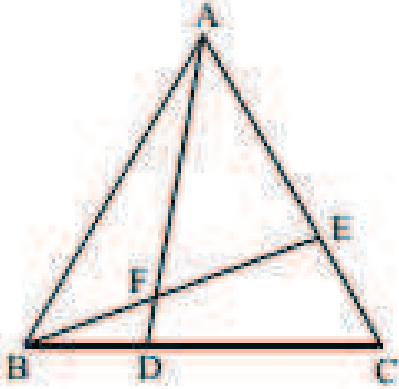
השני הוא ישתולל גבוהה פי ארבעה מההסתברות שרק ביום השני הוא לא ישתולל.

א. חשב את ההסתברות שארצ'י ישתולל בכל אחד משלושת הימים.

ב. ידעו שארצ'י השתולל רק פעם אחת בכל תקופת המעקב.

חשב את ההסתברות שהשתולל רק ביום השלישי.

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5



4. המשולש ABC הוא שווה צלעות. הנקודות D ו- E

נמצאות על הצלעות BC ו- AC כך ש- $DC = AE$

א. הוכח: $\triangle ACD \cong \triangle BAE$.

ב. חשב את הזווית DFE.

ג. הוכח שהמרובע CDFE בר חסימה במעגל.

ד. הוכח: $\angle DFC = \angle DEC$

5. מעגל חוסם משולש ישר זווית שבו חסום מעגל נוסף.

מצא את זוויות המשולש אם היחס בין רדיוס המעגל החוסם לרדיוס המעגל החסום הוא $\frac{13}{4}$

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. א. הוכח את הזהות: $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) היעזר בסעיף א' ומצא את נקודות הקיצון בתחום הנתון.

(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ג. מצא את ערכי m עבורם אין פתרון למשוואה $f(x) = m$ בתחום הנתון.

ד. מצא את ערך של m עבורו הישר $y = m$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בדיוק בשלוש נקודות בתחום הנתון.

ה. עבור הערך של m שמצאת בסעיף ד', חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר

$$y = m, \text{ ציר ה-} x \text{ והישר } x = \frac{5\pi}{4} \text{ בתחום } 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$$

7. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = ax^2$, $a > 0$ ו- $g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $b > 0$.

א. מצא את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. הבע באמצעות b אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$ המקבילות לצירים.

ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת, סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. נתון כי אחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא ב- $x = 1$ וכן נתון כי השטח המוגבל

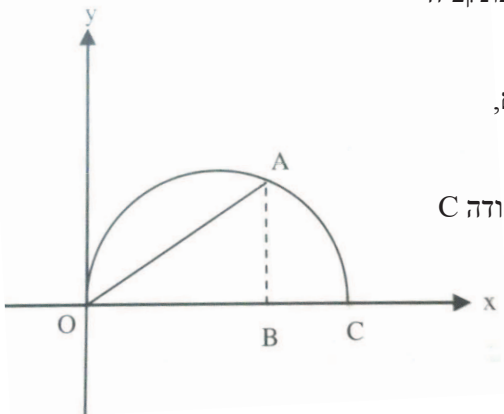
על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הוא $\frac{5}{3} - \sqrt{2}$. חשב את ערכי הפרמטרים a ו- b .

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$, $a \cdot b < 0$. הנקודה C היא

נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x . מנקודה כלשהי על גרף הפונקציה מורידים אנך לציר ה- x . נתון כי, מבין כל המשולשים שקודקדיהם: הנקודה הנ"ל, נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x וראשית הצירים, המשולש ABO שבציור, הנו המשולש בעל השטח המקסימאלי.

נתון גם כי: שיעור ה- x של הנקודה B קטן ב-1 משיעור ה- x של נקודה C

ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הוא $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.



א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הראה שהמשולש ABO הוא אכן בעל השטח המקסימאלי מבין המשולשים המתקבלים באופן זה.

ד. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A חותך את ציר ה- x בנקודה D. מצא את משוואת המשיק והראה

שהמשולש AOD הנו משולש שווה שוקים.

בהצלחה !